Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Dirección del campo eléctrico

La dirección del campo eléctrico en las proximidades de un material conductor es perpendicular a su superficie

FMPR

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Como el campo eléctrico es conservativo se deberá cumplir que la circulación del campo eléctrico E es cero en un camino cerrado.

La propiedad de los campos vectoriales llamada circulación se define como:

FMPR

Circulación.

- La integral a través de cualquier trayectoria cerrada **l** de la componente de **C** en la dirección de d**l** y se expresa como:

$$c = \oint_l \vec{C} \cdot d\vec{l}$$

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

En un campo de velocidades al definir una trayectoria para evaluar la circulación a través de un pequeño conducto por donde puede circular el fluido, la circulación del campo de velocidades de las partículas será una indicación de qué tan rápido puede circular el líquido a través del conducto supuesto.

FMPR

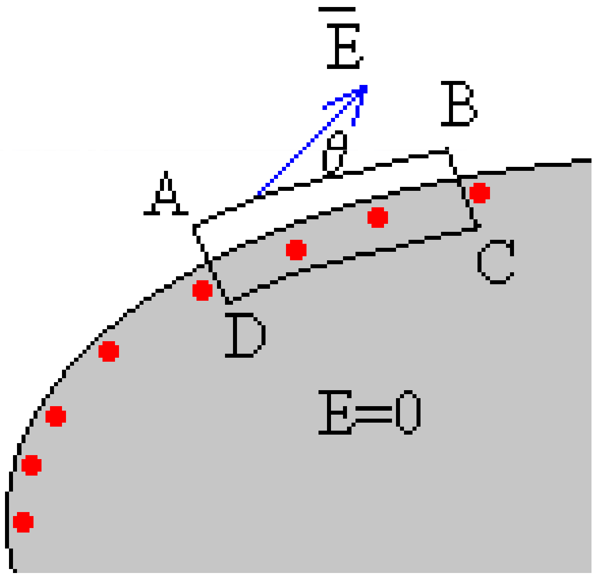
Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Si la circulación es cero significa que el fluido no circulará a través de la trayectoria escogida.

FMPR

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Consideremos el camino cerrado ABCD y supongamos que los puntos A y D, están muy próximos entre sí en el interior y en el exterior del conductor, respectivamente. Supongamos que B y C están también muy próximos entre sí. El tramo AB es paralelo a la superficie.



Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Supongamos que la dirección del campo eléctrico E en las proximidades de la superficie del conductor forma un ángulo θ con dicha superficie, tal como se muestra en la figura.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_A^B E\cdot dl\cdot\cos\theta + 0 + 0 + 0$$

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

La circulación del campo eléctrico es la suma de cuatro contribuciones, en el tramo CD es nula, por ser el campo en el interior de un conductor cero. Las contribuciones en los lados AD y BC son aproximadamente cero por ser sus longitudes muy pequeñas $|AD|=|BC|\approx 0$.

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

La contribución en el lado AB deberá ser por tanto cero para que la suma total sea cero. Esto solamente es posible, si el campo E es perpendicular a la superficie del conductor, es decir, forma 90º con el camino AB.

FMPR

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Debido a que las cargas se distribuyen de manera equidistante y residen en la superficie, la circulación debe ser cero, ya que la integral de línea de la trayectoria cerrada da cero. Esto implica que no hay movimiento de cargas.

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Por tanto, la consecuencia de que el campo eléctrico sea conservativo, es que la dirección del campo eléctrico en las proximidades de un conductor es perpendicular a la superficie del mismo.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

FMPR

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

El teorema de Stoke nos indica que para el campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_A \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{A} = 0$$

Por lo tanto el rotacional de un campo eléctrico estático es igual a cero.

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

FMPR

Campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor

Un campo vectorial es conservativo cuando el rotacional de dicho campo vectorial es igual a cero, por lo tanto, para el campo eléctrico estático producido por una superficie cargada

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \vec{E}_{\sigma} & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

El rotacional de un campo vectorial:

Si

$$\mathbf{F}(x\,,y,z) = (\,P(x,y,z)\,,\,Q\,(x,y,z)\,,\,R(x\,,y\,,z)\,)$$

Entonces el rotacional de **F** es el campo *vectorial:*

$$\mathbf{rot\ F} = \Delta \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Determine si el campo vectorial definido por $F(x,y,z)=(2xy,x^2+2yz,y^2)$ es un campo conservativo.

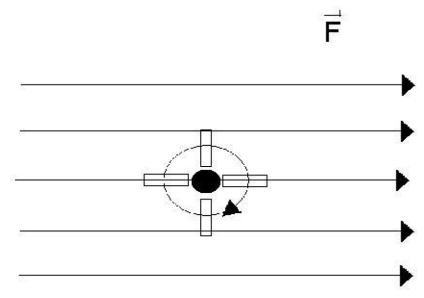
Solución. Por propiedades del rotacional, un campo vectorial es conservativo si $rot(F)=\vec{0}$, para demostrarlo aplicamos la definición del rotacional para calcularlo.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(y^2)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2+2yz)\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(2xy)-\frac{\partial}{\partial x}(y^2)\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right)\hat{k} \\
&= (2y-2y)\hat{i}+(0-0)\hat{j}+(2x-2x)\hat{k} \\
&= 0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}
\end{aligned}
$$

En donde queda demostrado que $F(x,y,z)=(2xy,x^2+2yz,y^2)$ es un campo conservativo.

En el cálculo vectorial, el rotacional o rotor es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.
El rotacional de un campo vectorial se define como la capacidad de un vector de rotar alrededor de un punto. También es definido como la circulación del vector sobre por un camino cerrado del borde de un área con dirección normal a ella misma cuando el área tiende a ser cero.

Es [como ver la direccion del giro al colocar un objeto dentro del campo vectorial]



Bibliografía.

Gabriel A. Jaramillo Morales, Alfonso A. Alvarado Castellanos.
Electricidad y magnetismo.
Ed. Trillas. México 2003

Sears, Zemansky, Young,Freedman
Física Universitaria
Ed. PEARSON. México 2005